17ก.ค.61

เลขที่นั่งสอบ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
การสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2561

วิชา MTH 201 Mathematics III — คณะวิศวกรรมศาสตร์ คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม

สอบวันจันทร์ที่ 1 ตุลาคม พ.ศ. 2561 — เวลา 13:00 –16:00 น.

คำชี้แจง

1 ข้อสอบรายวิชานี้ มี 2 หมวด จำนวน 14 หน้า (รวมใบปะหน้าและสูตร) รวม 90 คะแนน
   หมวด ก ข้อสอบ 9 ข้อ 45 คะแนน
   หมวด ข ข้อสอบ 5 ข้อ 45 คะแนน
2 นักศึกษาต้องเขียน ชื่อ รหัส ให้ครบทุกหมวด
3 ห้ามนำเอกสารทุกชนิดเข้าห้องสอบ
4 ห้ามนำเครื่องคำนวณและไม้บรรทัดที่มีสูตรคณิตศาสตร์เข้าห้องสอบ
5 ข้อสอบรายวิชานี้มีสูตรคณิตศาสตร์สองแผ่น ดึงออกจากชุดข้อสอบได้
6 ในกรณีที่ต้องการเนื้อที่ในการทำข้อสอบ ให้ทำข้อสอบต่อในกระดาษด้านหลังของแต่ละข้อ

เมื่อนักศึกษาทำข้อสอบเสร็จ ต้องยกมือบอกกรรมการคุมสอบ
เพื่อขออนุญาตออกนอกห้องสอบ
ห้ามนักศึกษานำข้อสอบและกระดาษคำตอบออกนอกห้องสอบ
นักศึกษาซึ่งทุจริตในการสอบ อาจถูกพิจารณาโทษสูงสุดให้พ้นสภาพการเป็นนักศึกษา

ชื่อ.....**รหัส**.....

คณาจารย์ผู้สอนวิชา MTH 201
ผู้ออกข้อสอบ

ข้อสอบรายวิชานี้ ได้ผ่านการพิจารณาจากคณะกรรมการประจำภาควิชาคณิตศาสตร์แล้ว

ลงชื่อ .....

ดร. วิบูลศักดิ์ วัฒายุ
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

หมวด ก (45 คะแนน)

1. จงพิจารณาว่าข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้ **ถูก** หรือ **ผิด** และเขียนเครื่องหมาย $\surd$ หรือ $\times$ ลงในช่องว่างที่กำหนดให้ (4 คะแนน)

..... 1.1) $\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)^3 - \left(\frac{d^3r}{d\theta^3}\right)^2 - 3r\cos\theta = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับ 3 ดีกรี 2

..... 1.2) $\frac{d^3x}{dt^3} - 3t^2x + t = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแบบเอกพันธ์

..... 1.3) $y^{(4)} - yy' + 2 = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับ 4 ดีกรี 1

..... 1.4) $3x^2y'' - 4xy' = (x-y)\ln x$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ 2

2. จงเขียนเครื่องหมาย $\surd$ ลงในตารางเพื่อบอกชนิดของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ (3 คะแนน)

สมการเชิงอนุพันธ์	สมการแยกตัวแปรได้	สมการเอกพันธ์	สมการแม่นตรง	สมการเชิงเส้น	สมการแบร์นูลลิ
1. $\frac{dx}{dt} = \frac{3t(2-tx)}{2x+t^3}$					
2. $\frac{x^2y}{x-y}\frac{dy}{dx} + 3xy = 0$					
3. $\left(e^{3x}y^2 + y\right)dx - dy = 0$					

3. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $2xy^2dx+\left(ax^2y+\frac{\cos 2y}{y}\right)dy=0$ .....(1)

3.1 จงหาค่าคงที่ **a** ที่ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ (1) มีตัวประกอบเพื่อการอินทิเกรต (integrating factor) คือ $\mu(y)=y$ (5 คะแนน)

3.2 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) (3 คะแนน)

4. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = xe^{y-x^2}$ (4 คะแนน)

5. ถังขนาดใหญ่บรรจุน้ำเกลือ 90 แกลลอนที่ประกอบด้วยเกลือ $\frac{1}{9}$ ปอนด์ต่อแกลลอน เทสารละลายอีกชนิดหนึ่งที่มีเกลือ 1 ปอนด์ต่อแกลลอน เข้าถังด้วยอัตราเร็วนาทีละ 3 แกลลอน ขณะเดียวกันปล่อยสารละลายที่ผสมแล้วไหลออกจากถังด้วยอัตราเร็วนาทีละ 6 แกลลอน
ถ้ากำหนดให้ x แทนปริมาณของเกลือในถัง ณ เวลา t ใดๆ จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้
(5 คะแนน)

IN =.....

OUT = ...

$x(0)$ =.....

สมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณเกลือในถัง คือ

.....

เมื่อเวลาผ่านไป.....นาที จะไม่มีน้ำเกลือเหลืออยู่ในถัง

6. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $\left(D^4+8D^2-9\right)y=\frac{2}{e^x}+x\sin 3x$ .....(2)

(7 คะแนน)

6.1 จงหาผลเฉลยประกอบ y_c

6.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะ y_p โดยใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (ไม่ต้องหาค่าสัมประสิทธิ์)

7. จงระบุว่าควรเลือกใช้วิธีใดในการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ (สามารถตอบได้มากกว่า 1 วิธี) (4 คะแนน)
(เทียบสัมประสิทธิ์ / อินทิเกรตสืบเนื่อง / Partial Fraction / Short Method / แปรผันพารามิเตอร์)

7.1 $y''' - 4y'' + 4y' = e^{2x} \sec x \tan x$

ใช้วิธี.....

เหตุผล.....

.....

7.2 $y'' + 9y = \dfrac{1}{4 - x^2}$

ใช้วิธี.....

เหตุผล.....

.....

8. จงหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์ $\left(D^2 + 4\right)y = e^x \sin 3x$ (5 คะแนน)

9. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - 2y' + 26y = e^x \sec 5x$ .....(3)
จงเติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้ (5 คะแนน)

9.1 ผลเฉลยประกอบของสมการเชิงอนุพันธ์ (3) คือ

$y_c =$ .....

9.2 ในการหาผลเฉลยเฉพาะโดยวิธีแปรผันพารามิเตอร์จะกำหนดรูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ ดังนี้

$y_p =$ .....

โดยมีเงื่อนไขในการหา v_1' และ v_2' คือ

.....

และ

.....

ชื่อ.....รหัส.....ภาควิชา.....

หมวด ข (ข้อสอบ 5 ข้อ 45 คะแนน)

1 กำหนดตำแหน่งเมื่อเวลา t ใดๆของวัตถุมวล m ที่ยึดติดกับปลายสปริงที่มีค่าคงตัวของสปริง k แล้วนำไปแขวนในแนวดิ่ง (สมมติว่าเป็นการเคลื่อนที่แบบมีแรงหน่วงแต่ไม่มีแรงภายนอก) คือ $x(t) = e^{-3t}\sin 5t$

1.1 จงพิจารณาว่าระบบมวลสปริงเป็นการเคลื่อนที่แบบใด (underdamped, critically damped, overdamped)

วิธีทำ **(2 คะแนน)**

1.2 จงหาตำแหน่งเริ่มต้น ความเร็วเริ่มต้นของวัตถุ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

1.3 ให้วัตถุมวล $m = 2$ จงหาค่าคงตัวของสปริง k และค่าคงตัวของการหน่วง b **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

2 จงหา

2.1 $\mathscr{L}\left\{te^{3t}\int_0^t \sinh\tau\cosh(t-\tau)\,d\tau\right\}$ **(6 คะแนน)**

วิธีทำ

2.2 $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \frac{2-e^u-\cos 2u}{u}\,du\right\}$ **(6 คะแนน)**

วิธีทำ

3 กำหนดให้ $f(t)=\begin{cases}\sin\omega t & , \ 0\le t<\dfrac{\pi}{\omega}\\ 0 & , \ \dfrac{\pi}{\omega}\le t<\dfrac{2\pi}{\omega}\end{cases}$ และ $f\left(t+\dfrac{2\pi}{\omega}\right)=f(t)$

จงหา $\mathscr{L}\{f(t)\}$ **(6 คะแนน)**

วิธีทำ

4 จงหา

4.1 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{8s-27}}\right\}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

4.2 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)^2}{e^{3s}(s+2)^4}\right\}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

5 กำหนดให้ $$f(t)=\begin{cases} 1 & , \ 0\le t<2 \\ 1+e^{-(t-2)}\cos(t-2) & , \ t\ge 2 \end{cases}$$

5.1 จงเขียนฟังก์ชัน $f(t)$ ในรูปของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

5.2 จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น **(10 คะแนน)**

$$y''(t)+2y'(t)+2y(t)=f(t) \ , \ y(0)=0 \ , \ y'(0)=0$$

วิธีทำ

DIFFERENTIAL	INTEGRAL
1. $dc = 0$	1. $\int du = u + C$
2. $d(cu) = c\,du$	2. $\int k\,du = k\int du + C$
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$	3. $\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$
4. $d(uv) = u\,dv + v\,du$	4. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}, v \neq 0$	5. $\int \dfrac{1}{u}\,du = \ln\lvert u\rvert + C$
6. $d(u^n) = nu^{n-1}du$	6. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0$ and $a \neq 1$
7. $d(\sqrt{u}) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\,du$	7. $\int e^u du = e^u + C$
8. $d(e^u) = e^u du$	8. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$
9. $d(a^u) = a^u \ln a\,du, \quad a > 0$ and $a \neq 1$	9. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (By Parts)
10. $d(\ln u) = \dfrac{1}{u}\,du$	10. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
11. $d(\log_a u) = \dfrac{1}{u \ln a}\,du, \quad a > 0$ and $a \neq 1$	11. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
12. $d(\sin u) = \cos u\,du$	12. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
13. $d(\cos u) = -\sin u\,du$	13. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
14. $d(\tan u) = \sec^2 u\,du$	14. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
15. $d(\cot u) = -\csc^2 u\,du$	15. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
16. $d(\sec u) = \sec u \tan u\,du$	16. $\int \tan u\,du = \ln\lvert\sec u\rvert + C$
17. $d(\csc u) = -\csc u \cot u\,du$	17. $\int \cot u\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
18. $d(\arcsin u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du, \quad -1 < u < 1$	18. $\int \sec u\,du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$
19. $d(\arccos u) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\,du, \quad -1 < u < 1$	19. $\int \csc u\,du = \ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + C$
20. $d(\arctan u) = \dfrac{1}{1+u^2}\,du$	20. $\int \sin^2 u\,du = \dfrac{u}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2u + C$
21. $d(\operatorname{arccot} u) = \dfrac{-1}{1+u^2}\,du$	21. $\int \cos^2 u\,du = \dfrac{u}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2u + C$
22. $d(\operatorname{arcsec} u) = \dfrac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\,du, \quad \lvert u\rvert > 1$	22. $\int \dfrac{1}{a^2+u^2}\,du = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$
23. $d(\operatorname{arccsc} u) = \dfrac{-1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\,du, \quad \lvert u\rvert > 1$	23. $\int \dfrac{1}{a^2-u^2}\,du = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u+a}{u-a}\right\rvert + C$
	24. $\int \dfrac{1}{u^2-a^2}\,du = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$

Trigonometric Identities

$\sin(-A) = -\sin A \qquad \cos(-A) = \cos A \qquad \tan(-A) = -\tan A$

$\csc(-A) = -\csc A \qquad \sec(-A) = \sec A \qquad \cot(-A) = -\cot A$

$\csc A = \dfrac{1}{\sin A} \qquad \sec A = \dfrac{1}{\cos A} \qquad \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} \qquad \cot A = \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \qquad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \qquad 1 + \cot^2 A = \csc^2 A$

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \qquad \sin 2A = 2\sin A \cos A = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$

$\sin^2 A = \dfrac{1 - \cos 2A}{2} \qquad \cos^2 A = \dfrac{1 + \cos 2A}{2}$

$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \qquad \tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\cot(A \pm B) = \dfrac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A} \qquad \cot 2A = \dfrac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$

$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2\sin A \cos B \qquad \sin(A + B) - \sin(A - B) = 2\cos A \sin B$

$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B \qquad \cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\sin A \sin B$

Hyperbolic Formulas

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}, x \neq 0 \qquad \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, x \neq 0$

25. $\int e^{au} \sin bu\,du = \dfrac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\sin bu - b\cos bu) + C$

26. $\int e^{au} \cos bu\,du = \dfrac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\cos bu + b\sin bu) + C$

สูตรตัวดำเนินการผกผัน

นิพจน์	ผลลัพธ์
$\frac{1}{D}b(x)$	$\int b(x)\,dx$
$\frac{1}{D-a}b(x)$	$e^{ax}\int e^{-ax}b(x)\,dx$
$\frac{1}{(D-a)^n}b(x)$	$e^{ax}\underbrace{\iint\cdots\int}_{n\text{ ตัว}}e^{-ax}b(x)\,(dx)^n$
$\frac{1}{P(D)}e^{ax}$	$\frac{e^{ax}}{P(a)}$, $P(a)\neq 0$
$\frac{1}{(D-a)^n}e^{ax}$	$\frac{x^n e^{ax}}{n!}$, $n=1,2,\ldots$
$\frac{1}{(D-a)^n P(D)}e^{ax}$	$\frac{x^n e^{ax}}{n!\,P(a)}$, $n=1,2,\ldots$ $P(a)\neq 0$
$\frac{1}{P(D^2)}\sin(ax+b)$	$\frac{1}{P(-a^2)}\sin(ax+b)$, $P(-a^2)\neq 0$
$\frac{1}{P(D^2)}\cos(ax+b)$	$\frac{1}{P(-a^2)}\cos(ax+b)$, $P(-a^2)\neq 0$
$\frac{1}{D^2+a^2}\sin(ax+b)$	$\frac{-x}{2a}\cos(ax+b)$
$\frac{1}{D^2+a^2}\cos(ax+b)$	$\frac{x}{2a}\sin(ax+b)$
$\frac{1}{P(D)}e^{ax}U(x)$	$e^{ax}\frac{1}{P(D+a)}U(x)$
$\frac{1}{P(D)}xU(x)$	$x\frac{1}{P(D)}U(x)-\frac{1}{P(D)}P'(D)\frac{1}{P(D)}U(x)$

สูตรตรีโกณมิติ

$\sin(-A)=-\sin A$ $\quad\cos(-A)=\cos A$ $\quad\tan(-A)=-\tan A$

$\csc A=\frac{1}{\sin A}$ $\quad\sec A=\frac{1}{\cos A}$ $\quad\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ $\quad\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{\cos A}{\sin A}$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ $\quad 1+\tan^2 A=\sec^2 A$ $\quad 1+\cot^2 A=\csc^2 A$

$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$

$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$

$\sin 2A=2\sin A\cos A$

$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

$\sin^2 A=\frac{1-\cos 2A}{2}$ $\qquad\cos^2 A=\frac{1+\cos 2A}{2}$

$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$ $\qquad\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$

$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$ $\qquad\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$

สูตรและสมบัติการแปลงลาปลาซ

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=F(s)$$

1 $\mathscr{L}\{k\}=\frac{k}{s}$, k เป็นค่าคงตัว	1 $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$
2 $\mathscr{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$, $n=1,2,\ldots$	2 $\mathscr{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$, $n=1,2,\ldots$
3 $\mathscr{L}\{t^a\}=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, $a>-1$	3 $\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(u)\,du$
4 $\mathscr{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$	4 $\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
5 $\mathscr{L}\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$	5 $\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}=\frac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{F(s)}{s}$
6 $\mathscr{L}\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$	6 $\mathscr{L}\{f(t)*g(t)\}=\mathscr{L}\{f(t)\}\cdot\mathscr{L}\{g(t)\}=F(s)G(s)$
7 $\mathscr{L}\{\sinh at\}=\frac{a}{s^2-a^2}$	โดยที่ $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$
8 $\mathscr{L}\{\cosh at\}=\frac{s}{s^2-a^2}$	7 $\mathscr{L}\{u(t-a)\}=\frac{e^{-as}}{s}$ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย
9 $\mathscr{L}\{t\sin at\}=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	8 $\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}$
10 $\mathscr{L}\{t\cos at\}=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	9 $\mathscr{L}\{f(t)u(t-a)\}=e^{-as}\mathscr{L}\{f(t+a)\}$
11 $\mathscr{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}=\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$	10 $\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$ เมื่อ $f(t+T)=f(t)$