5ตค.61

เลขที่นั่งสอบ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

การสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2561

ข้อสอบวิชา MTH 330 Abstract Algebra I **สำหรับนักศึกษา สาขา คณิตศาสตร์ เท่านั้น**

สอบวัน ศุกร์ ที่ 5 เดือน ~~กันยายน~~ ตุลาคม 2561 **เวลา 9.00 – 12.00 น.**

คำเตือน

1. ข้อสอบฉบับนี้ มีทั้งหมด 11 หน้า (รวมใบปะหน้า) รวม 8 ข้อ คะแนนรวม 74 คะแนน
2. ให้ทำในข้อสอบเท่านั้น
3. ไม่อนุญาตให้นำตำราและเอกสารใด ๆ เข้าห้องสอบ
4. ไม่อนุญาตให้นำเครื่องคำนวณใด ๆ เข้าห้องสอบ
5. ในกรณีที่ข้อสอบไม่ชัดเจนหรือมีข้อสงสัย ให้ตัดสินใจแก้ปัญหาพร้อมทั้งอธิบายเหตุผลที่ตัดสินใจทำเช่นนั้น
6. หากเนื้อที่สำหรับการเขียนไม่เพียงพอ ให้นักศึกษาเขียนต่อด้านหลังของหน้าที่มีข้อสอบข้อนั้นอยู่เท่านั้น และแจ้งผู้ตรวจให้เห็นชัดเจน มิฉะนั้น ข้อสอบอาจจะไม่ได้รับการตรวจ

เมื่อนักศึกษาทำข้อสอบเสร็จ ต้องยกมือบอกกรรมการคุมสอบ

เพื่อขออนุญาตออกนอกห้องสอบ

ห้ามนักศึกษานำข้อสอบและกระดาษคำตอบออกนอกห้องสอบ

นักศึกษาซึ่งทุจริตในการสอบ อาจถูกพิจารณาโทษสูงสุดให้พ้นสภาพการเป็นนักศึกษา

ชื่อ__________ **รหัสนักศึกษา**__________ **ภาควิชา**__________

ดร. อนุวัฒน์ ตั้งธนวัฒน์สกุล

ผู้ออกข้อสอบ (โทร. 8988)

ข้อสอบได้ผ่านการพิจารณาจากคณะกรรมการพิจารณาข้อสอบภาควิชาคณิตศาสตร์

(ดร.วิบูลย์ศักดิ์ วัฒายุ)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

Name .... I.D. ....

Midterm Exam (Total 74 Points)

MTH 330 Abstract Algebra I

1. (6 Points, 2 each) Provide the definition of the followings.

   1.1) A group $(G,*)$

   1.2) A group homomorphism from the group $(G,*)$ to the group $(H,\otimes)$

   1.3) A cyclic group G

Name .... I.D. ....

2. (10 Points, 2.5 each) Provide a simple example of the group in each problem below. If there is no such example exist, provide your reason why it does not exist.

2.1) A non-cyclic group of order 4

2.2) A non-abelian group of order 24

2.3) A cyclic subgroup of order 8 of the cyclic group $(\mathbb{Z}_{36}, +)$

2.4) An abelian group of order 8 which is not cyclic

Name .... I.D. ....

3. (Total 10 Points) Let $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$.

   3.1) (6 Points) Assume that the matrix multiplication is associative. Show that G is a group under matrix multiplication.

Name .... I.D. ....

3.2) (4 Points) Show that G is isomorphic to $(\mathbb{Z},+)$.

4. (9 Points) If G is any group, define a function $\varphi : G \to G$ by $\varphi(g) = g^{-1}$. Show that G is abelian if and only if φ is a homomorphism.

Name .... I.D. ....

5. (Total 8 Points) Let S,T be subgroups of a group G.

5.1) (5 Points) Show that $S \cap T$ is a subgroup of G.

5.2) (3 Points) Is it also true that $S \cup T$ is always a subgroup of G? (Provide a proof if it is true, or provide a counterexample if it is false.)

Name .... I.D. ....

6. (Total 10 Points, 5 each) Let $(G,*)$ and $(H,\otimes)$ be two groups. Let G_0 be a subgroup of G and H_0 be a subgroup of H. Suppose that $\phi : G \to H$ be a group homomorphism.

6.1) Show that $\phi(G_0) := \{\, \phi(x) \mid x \in G_0 \}$ is a subgroup of H.

Name .... I.D. ....

6.2) Show that $\phi^{-1}(H_0) := \{ x \in G \mid \phi(x) \in H_0 \}$ is a subgroup of G.

7. (Total 10 Points, 5 each) Let G be a group with identity e and let $g \in G$ be any element of the group G.

   7.1) Show that if $o(g) = k$ and m is another integer such that $g^m = e$, then $k \mid m$.

   7.2) Suppose further that G is cyclic of order n. Show that $o(g) \mid n$. (Hint: To prove 7.2), you may refer to the result of 7.1) even if you are not able to prove 7.1))

Name .... I.D. ....

8. (11 Points) How many subgroups does $(\mathbb{Z}_{54},+)$ have? List all subgroups of $(\mathbb{Z}_{54},+)$ and also provide the lattice diagram of subgroups of $(\mathbb{Z}_{54},+)$.