การสอบ~~ปลาย~~กลางภาคการศึกษาที่ 1/2560 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

วิชา ETE 460 Electrical Mathematics — **ภาควิชา** ครุศาสตร์ไฟฟ้า

สอบวันที่ 3 ตุลาคม 2560 — **เวลา** 13:00 – 16:00 น.

คำแนะนำ

1. ข้อสอบมี 4 ข้อคะแนนเต็ม 100 คะแนน ให้ทำทุกข้อลงในสมุดคำตอบ
2. ไม่อนุญาติให้นำเอกสารใดๆ เข้าห้องสอบ
3. อนุญาติให้นำเครื่องคิดเลขตามระเบียบมหาวิทยาลัยฯ เข้าห้องสอบได้
4. ข้อสอบไม่มีการแก้ไขใดๆ ทั้งสิ้น ให้นักศึกษาใช้วิจารณญาณของตนเอง ในการแก้ปัญหาข้อสอบ

ชื่อ______________________________ รหัสนักศึกษา____________________

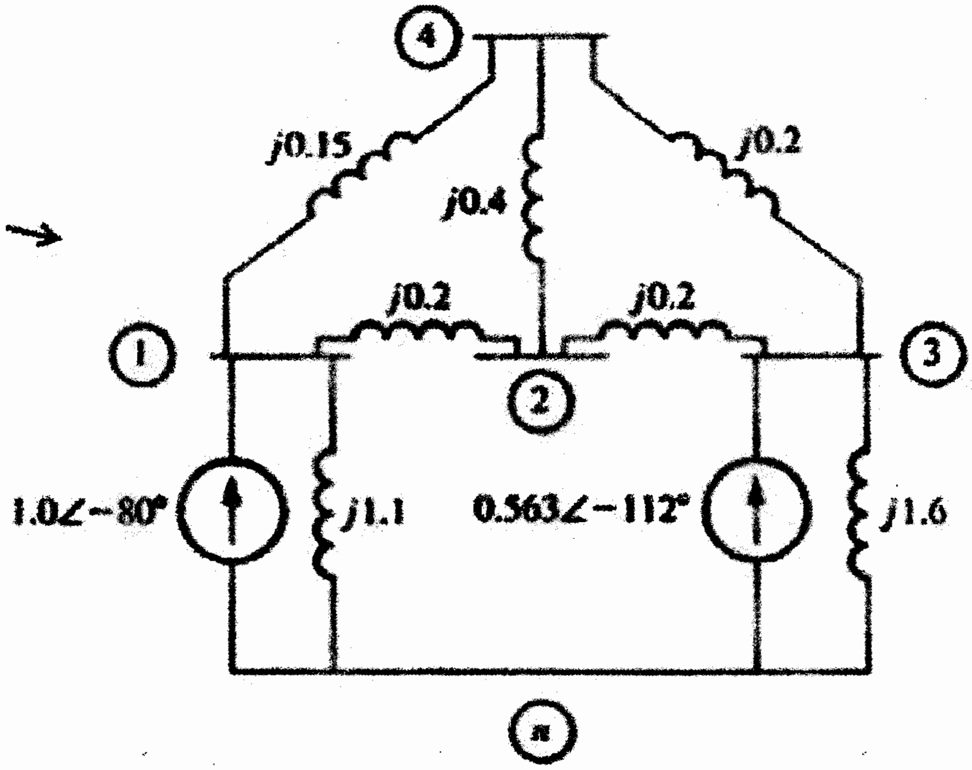
อ.คมกฤตย์ ชมสุวรรณ
ผู้ออกข้อสอบ

ข้อสอบฉบับนี้ได้ผ่านการพิจารณาจาก คณะกรรมการหลักสูตรแล้ว

(รศ.ดร.ขรรค์ชัย ตุลละสกุล)
ประธานหลักสูตร

1. จากรูปที่ 1 ถ้ากำหนดให้ จงคำนวณหาค่า V_1, V_2, V_3 และ V_4 โดยใช้วิธี node voltage

(30 คะแนน)



รูปที่ 1

2. จงคำนวณหา $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ของฟังก์ชั่นด้านล่างพร้อมทั้งจัดรูปแบบสมการให้อยู่ในรูป

$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=G(x)$ (20 คะแนน)

2.1 $y=e^{cx}\left(a_1\cos bx+a_2\sin x\right)$

2.2 $y=(ax-b)e^{cx}$

2.3 $y=a_1e^{b_1x}+a_2e^{b_2x}$

2.4 $y=ax+b$

3. จงวิเคราะห์หาผลอินทิกรัลของฟังก์ชั่นต่อไปนี้ (20 คะแนน)

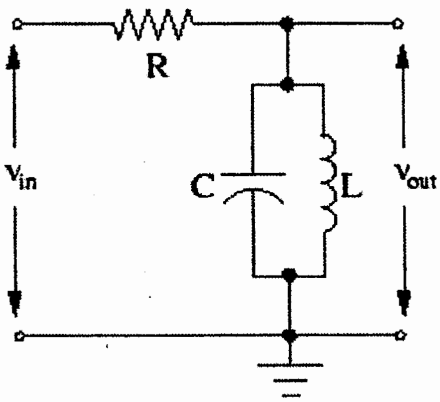
3.1 $\int e^{2x} \sin x \, dx$

3.2 $\int x \sin x \cos x \, dx$

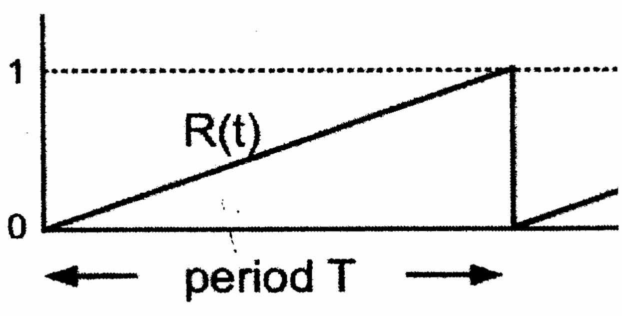
3.3 $\int x^3 \sqrt{9 - x^2} \, dx$

3.4 $\int \frac{x^3 - 11x - 26}{x^2 + x - 6} dx$

4. จากวงจรในรูปที่ 2 จงหา Transfer function และวิเคราะห์หาผลตอบสนองทางความถี่ของวงจร (V_o กับ $j\omega$) ถ้ากำหนดให้ $R = 100\ \Omega$ $L = 10$ mH และ $C = 100\ \mu$F จงวิเคราะห์หาฟังกชั่นของ V_o ในรูป time domain ถ้ารูปคลื่น V_i มีลักษณะดังรูปที่ 3 (30 คะแนน)



รูปที่ 2



รูปที่ 3

Trigonometric Identity

The six trigonometric functions:

$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{y}{r}$ $\qquad \csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta}$

$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{x}{r}$ $\qquad \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta}$

Sum or difference of two angles:

$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$

$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$

$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b}$

Double angle formulas: $\qquad \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ $\qquad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

Pythagorean Identities: $\qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\qquad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

Half angle formulas:

$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ $\qquad \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ $\qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

Sum and product formulas:

$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$\cos a\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Law of cosines: $\qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

where A is the angle of a scalene triangle opposite side a.

Radian measure: 8 1 p420 $\qquad 1° = \frac{\pi}{180}$ radians

$1 \text{ radian} = \frac{180°}{\pi}$

Reduction formulas:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(\theta) = -\sin(\theta - \pi)$ $\qquad \cos(\theta) = -\cos(\theta - \pi)$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\qquad \tan(\theta) = \tan(\theta - \pi)$

$\mp\sin x = \cos(x \pm \frac{\pi}{2})$ $\qquad \pm\cos x = \sin(x \pm \frac{\pi}{2})$

Complex Numbers: $\qquad e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ $\qquad \sin\theta = \frac{1}{j2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

Differentiation	Integration
$(cu)' = cu' \quad (c \text{ constant})$	$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$ (by parts)
$(u+v)' = u' + v'$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$
$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ (Chain rule)	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$
$(e^x)' = e^x$	$\int \cot x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$
$(e^{ax})' = ae^{ax}$	$\int \sec x\,dx = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + c$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\int \csc x\,dx = \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + c$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{arcsinh}\frac{x}{a} + c$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} + c$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$
$(\cosh x)' = \sinh x$	$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c$
$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$	$\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + c$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$
$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	

Laplace transform equation

f(t), t $\geqq$ 0	F(s)	ROC
1. $\delta(t)$	1	All s
2. $u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
3. t	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
4. t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
5. e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
6. te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
7. $t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
8. $\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
9. $\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
10. $e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
11. $e^{-at}\cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
12. $t\sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
13. $t\cos bt$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$